Test de mathématiques 2

Durée : 1h30, L1

La réussite passe par un effort constant.

Exercice 1 *Soit*

$$V = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y = 0 \ \textit{et}\ x + y - t = 0\Big\}$$

1. (a) *Que signifie* $(x, y, z, t) \in V$.
   (b) *Montrer que* $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \in V$.
   (c) *Soient* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $(x_1, x_2, x_3, x_4) + \alpha(y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$.
   (d) *Que peut-on dire de* V.
2. *Soit* $(x, y, z, t) \in V$.
   (a) *Exprimer* x *et* t *en fonction de* y.
   (b) *Déduire que*
   $$(x, y, z, t) = y(2, 1, 0, 3) + z(0, 0, 1, 0).$$
   (c) *Déduire une base de* V, *puis sa dimension.*

Exercice 2 1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 3x - 4y = 2\}$ *est il un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *?*

2. *La famille* $\{(1, -2, 2), (2, 5, 2), (1, -5, 3)\}$ *engendre-t-elle* $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 3 *On veut étudier la convergence de la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = 0$ *où pour* $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{2 + x}$.

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Montrer que* f *est croissante et déduire que la suite* $(u_n)_n$ *est croissante.*
3. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.
4. *En remarquant que* $f(2) = 2$, *déduire de ce qui précède que la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* 2.