ÉCHAUFFEMENT NUMÉRO UN

I Algèbre

1. Définissez les termes suivants :
   i) Polynôme unitaire ;
   ii) Polynôme irréductible ;
   iii) quand dit on que a est racine de multiplicité n du polynôme P ?
2. Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^5 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ à l'ordre 4 suivant les puissances croissantes ?
3. Décomposer en élément simple $H = \frac{X+1}{(X^2+1)^3(X^2-X+1)}$?
4. Calculer $\int_0^2 \frac{x^2}{x^2-4x-3}dx$?
5. Montrer qu'un polynôme de degré 2 est irréductible si et seulement si son discriminant est négatif ?

II Analyse

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.Définissez f est dérivable en x_0 ?
2. Soit
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$
étudier la dérivabilité de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto & \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, f est dérivable en 0.
   b) Montrer que pour $n = 0$, f n'est pas continue en 0,puis que dire de f' en 0 ?
   c) Montrer que pour $n = 1$, f est continue en 0,puis déduire de b) si f' est dérivable en 0 ?
4. en utilisant l'inégalité des accroissement finis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$?