

Modèles probabilistes des épidémies avec infectivité variable et perte progressive d'immunité.  
Inégalités à poids sur des espaces de Lebesgue à exposant variables pour le projecteur de Bergman dans la boule unité de  $\mathbb{C}^n$ .



Arsene Brice Zotsa Ngoufack  
Doctorant à Aix-Marseille Université  
Sous la direction du

Dr Raphaël Forien, Pr Raoul Ayissi et Co-dirigé par le Pr Etienne Pardoux  
20/09/2024

# 1. Historique et motivation

# Principe général

Dans le monde, nous faisons souvent face à des épidémies. Pour certaines d'entre elles, lorsque les individus se rétablissent,

- Ils acquièrent une immunité totale, comme c'est le cas pour la varicelle ;
- Dans d'autres cas, l'individu est immunisé pendant une certaine période, mais cette immunité diminue progressivement et peut même disparaître comme c'est le cas pour la Covid-19.

## Définitions de termes clés

- Infectivité : Taux avec lequel un individu infecte un autre individu ;
- Susceptibilité : La probabilité avec laquelle un individu est infecté ;
- Âge d'infection : C'est le temps écoulé depuis l'infection ;
- Âge de rémission : C'est le temps écoulé depuis la rémission ;
- $R_0$  : C'est le nombre d'individus infectés par un individu infecté dans une population de susceptibles.
- L'épidémie sera dite endémique lorsqu'elle persiste pendant longtemps dans la population.
- On parle d'équilibre endémique lorsque le nombre de nouvelles infections est compensé par le nombre d'individus qui se rétablissent.
- Modèles markoviens :

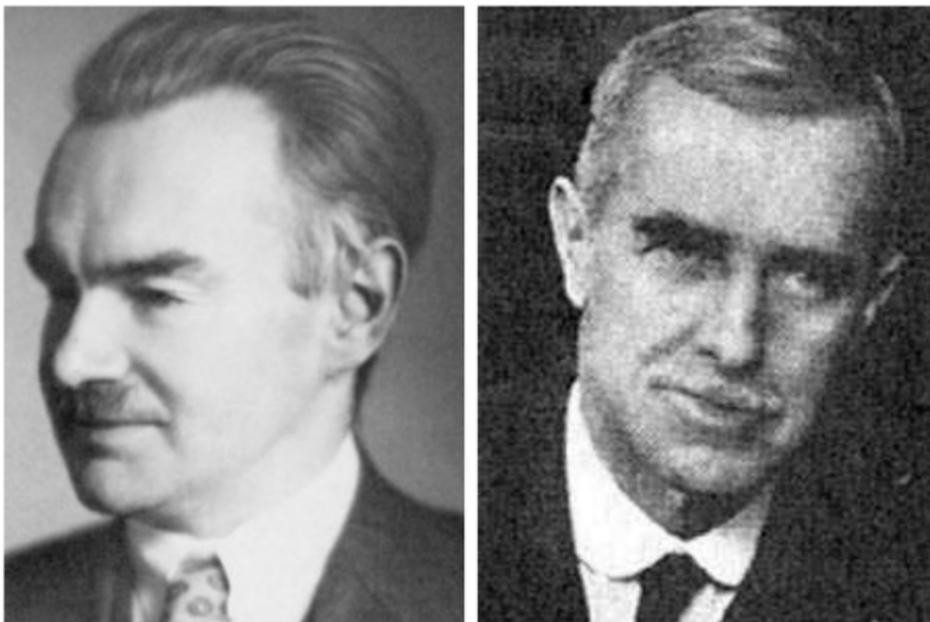


Figure – Kermack et McKendrick.

- Mckendrick 1925 modèle stochastique d'épidémie. Il donne l'équation de Fokker Planck du modèle SIR
- Le modèle de Kermack et McKendrick de 1927, 1932 est déterministe. ▶



# Limites des modèles compartimentaux markovien

- 1 la probabilité qu'un contact entre un infectieux et un susceptible résulte en une infection est toujours la même, quel que soit le temps écoulé depuis l'infection du premier individu ;
- 2 Les durées de séjours dans chaque compartiment suivent des lois exponentielles. D'où l'absence de mémoire ;
- 3 Lorsque le nombre de reproduction de base  $R_0$  devient brutalement inférieur à un, l'épidémie continue de croître pendant un petit moment avant de chuter.

# Solutions aux manquements des modèles markoviens

- Soit rester dans le cadre markovien en multipliant le nombre de compartiments ;
- Soit rester dans le cadre markovien en passant en dimension infinie en considérant les modèles structurés en âge.
- Soit s'affranchir du cadre markovien et passer aux modèles non-markoviens.

## Les modèles structurés en âges

- Les modèles structurés en âges sont basés sur des processus de branchement avec interaction, plus précisément les processus de Crump-Mode et Jagers (CMJ) (1968).
- Les processus CMJ décrivent le nombre d'individus vivant à un instant donné qui descendent d'un unique ancêtre à l'instant initial.
- L'évolution des âges des individus est modélisée par un processus à valeurs mesures.

Nous avons des travaux établissant la loi des grands nombres et le théorème central limite d'une population structurée en âge. Il s'agit en particulier de [Oeschlager, 1990], [Tran, 2006], [Hanza et al, 2013].

# Modèles SIR non-markoviens

- En 2020 Pang et Pardoux établissent la loi des grands nombres pour le modèle SIR non-markovien. Dans cet article la loi des durées est arbitraire mais le taux d'infection reste constant.
- Un peu plus tard (2021) Forien, Pang et Pardoux établissent la loi des grands nombres pour un modèle SIR non-markovien avec infectivité variable. Dans ce modèle, à chaque infection on se donne une fonction d'infectivité aléatoire  $\lambda$ .

# Objectif

Notre objectif dans cette présentation est d'introduire un modèle stochastique d'épidémie prenant en compte la perte progressive d'immunité et une infectivité variable. Plus précisément,

- La loi des grands nombres lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,
- L'étude du comportement en temps long,
- Le théorème central limite.



## 2. Loi des grands nombres

## Description du modèle

- 1 On se donne  $N$  le nombre d'individus ;
- 2 On suppose qu'une fraction de la population est infectée à l'instant 0 ;
- 3 On suppose que chaque paire d'individus a des contacts infectieux aux instants de saut d'un processus de Cox d'intensité égale à son infectivité courante divisée par  $N$  et il devient infectieux avec une probabilité qui est égale à sa susceptibilité courante ;
- 4 On suppose de plus qu'à chaque nouvelle infection on tire une paire de fonctions aléatoires càdlàg  $(\lambda, \gamma)$  indépendante des précédentes, représentant l'infectivité et la susceptibilité de l'individu nouvellement infecté.

# Illustration

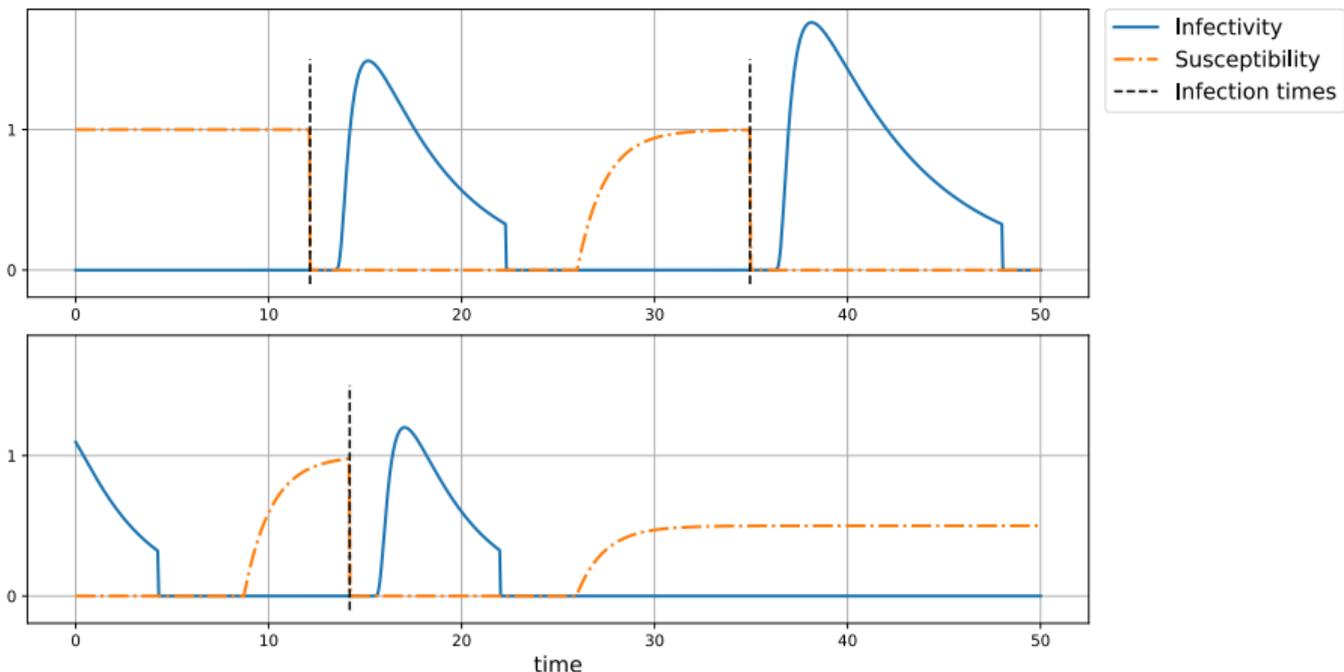


Figure – Illustration de l'évolution de l'infectivité et de la susceptibilité d'un individu avec le temps.

# Modèle mathématiques

- On se donne  $(\lambda_{k,i}, \gamma_{k,i})_{k \geq 1, i \geq 1} \subset D^2$  une famille i.i.d de fonctions aléatoires.
- On se donne aussi  $(\lambda_{k,0}, \gamma_{k,0})_{k \geq 1} \subset D^2$  une famille i.i.d de fonctions aléatoires indépendantes des précédentes.
- Pour chaque individu  $k$ , nous notons  $A_k^N(t)$  le nombre de fois que l'individu  $k$  a été infecté entre l'instant 0 et  $t$ , et nous définissons

$$\varsigma_k^N(t) := (t - \sup\{s \in [0, t] : A_k^N(s) = A_k^N(s^-) + 1\}) \vee 0,$$

le temps écoulé depuis la dernière infection de l'individu  $k$ .

- Par conséquent à l'instant  $t$ , l'individu  $\ell$  infecte l'individu  $k$  au taux

$$\gamma_{k, A_k^N(t)}(\varsigma_k^N(t)) \frac{\lambda_{\ell, A_\ell^N(t)}(\varsigma_\ell^N(t))}{N} \quad (1)$$

# Modèle Mathématique

- Ainsi le  $k$ -ième individu devient infecté à l'instant  $t$  au taux

$$\gamma_{k,A_k^N(t)}(s_k^N(t)) \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \lambda_{\ell,A_\ell^N(t)}(s_\ell^N(t)). \quad (2)$$

- On note

$$\bar{\lambda}^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda_{k,A_k^N(t)}(s_k^N(t)) \quad (3)$$

et

$$\bar{\gamma}^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma_{k,A_k^N(t)}(s_k^N(t)). \quad (4)$$

Nous notons la durée de l'infection de l'individu  $k$  après sa  $i$ -ième infection par

$$\eta_{k,i} = \sup\{t \geq 0, \lambda_{k,i}(t) > 0\}.$$

Alors

- Le nombre d'individus infectés à l'instant  $t \geq 0$  est donné par

$$I^N(t) = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\varsigma_k^N(t) < \eta_{k,A_k^N(t)}}. \quad (5)$$

- Le nombre d'individus non-infectés à l'instant  $t \geq 0$  est donné par

$$U^N(t) = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\varsigma_k^N(t) \geq \eta_{k,A_k^N(t)}}. \quad (6)$$

Remarquons que  $U^N(t) + I^N(t) = N$  pour tout  $t \geq 0$ .

# Hypothèses

## Hypothèses 1

On suppose que :

- 1 Il existe une constante  $\lambda_* < \infty$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $0 \leq \lambda(t)$ ,  $\lambda_0(t) \leq \lambda_*$  presque sûrement, et  $0 \leq \gamma(t)$ ,  $\gamma_0(t) \leq 1$  presque sûrement.
- 2 Presque sûrement,

$$\sup\{t \geq 0, \lambda_0(t) > 0\} \leq \inf\{t \geq 0, \gamma_0(t) > 0\} \quad (7)$$

et

$$\sup\{t \geq 0, \lambda(t) > 0\} \leq \inf\{t \geq 0, \gamma(t) > 0\}. \quad (8)$$

## Théorème 1

Sous les hypothèses ci-dessus,

$$(\bar{\mathfrak{G}}^N, \bar{\mathfrak{F}}^N) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} (\bar{\mathfrak{G}}, \bar{\mathfrak{F}}) \text{ dans } D^2$$

où  $(\bar{\mathfrak{G}}, \bar{\mathfrak{F}})$  est solution du système d'équations ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{G}}(t) = \mathbb{E} \left[ \gamma_0(t) \exp \left( - \int_0^t \gamma_0(r) \bar{\mathfrak{F}}(r) dr \right) \right] \\ \quad + \int_0^t \mathbb{E} \left[ \gamma(t-s) \exp \left( - \int_s^t \gamma(r-s) \bar{\mathfrak{F}}(r) dr \right) \right] \bar{\mathfrak{G}}(s) \bar{\mathfrak{F}}(s) ds, \quad (9) \\ \bar{\mathfrak{F}}(t) = \bar{l}(0) \bar{\lambda}_0(t) + \int_0^t \bar{\lambda}(t-s) \bar{\mathfrak{G}}(s) \bar{\mathfrak{F}}(s) ds. \quad (10) \end{array} \right.$$

où  $\bar{\lambda}_0(t) = \mathbb{E} [\lambda_{1,0}(t) | \eta_{1,0} > 0]$ ,  $\bar{\lambda}(t) = \mathbb{E} [\lambda_{1,1}(t)]$  et  $\gamma_0 \stackrel{d}{=} \gamma_{1,0}$ ,  $\gamma \stackrel{d}{=} \gamma_{1,1}$ .

# Loi fonctionnelle des grands nombres

Nous avons aussi

$$(\bar{U}^N, \bar{I}^N) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} (\bar{U}, \bar{I}) \quad \text{dans } D^2$$

où  $(\bar{U}, \bar{I})$  est donné

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) = & \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{t \geq \eta_0} \exp \left( - \int_0^t \gamma_0(r) \bar{\mathfrak{F}}(s) dr \right) \right] \\ & + \int_0^t \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{t-s \geq \eta} \exp \left( - \int_s^t \gamma(r-s) \bar{\mathfrak{F}}(r) dr \right) \right] \bar{\mathfrak{G}}(s) \bar{\mathfrak{F}}(s) ds, \end{aligned}$$

$$\bar{I}(t) = \bar{I}(0) F_0^c(t) + \int_0^t F^c(t-s) \bar{\mathfrak{G}}(s) \bar{\mathfrak{F}}(s) ds,$$

avec  $F_0^c(t) = \mathbb{P}(\eta_0 \geq t | \eta_0 > 0)$ ,  $F^c(t) = \mathbb{P}(\eta \geq t)$ , et  $\bar{I}(0) = \mathbb{P}(\eta > 0)$

# Étapes de la preuve

- ❶ On rappelle que

$$A_k^N(t) = \int_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\overline{\mathfrak{F}}^N(s) \gamma_{A_k^N(s)}(\varsigma_k^N(s)) \geq u} Q_k(ds, du); \quad (11)$$

- ❷ Pour toute fonction mesurable positive  $m$ , nous définissons le processus

$$A^{(m)}(t) = \int_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{m(s) \gamma_{A^{(m)}(s)}(\varsigma^{(m)}(s)) \geq u} Q(ds, du),$$

et nous définissons  $\overline{\mathfrak{F}}^{(m)}(t) = \mathbb{E} [\lambda_{A^{(m)}(t)}(\varsigma^{(m)}(t))]$  et

$\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}(t) = \mathbb{E} [\gamma_{A^{(m)}(t)}(\varsigma^{(m)}(t))]$ .

- ❸ Puis nous montrons qu'il existe une unique fonction mesurable positive  $m_*$  telle que  $m_* = \overline{\mathfrak{F}}^{(m_*)}$ . De plus  $(m_*, \overline{\mathfrak{G}}^{(m_*)})$  est une solution de (9)-(10).

# Idée de la preuve

- 1 Par la suite comme dans l'article de [Chevallier,2017] nous construisons une suite i.i.d  $(A_k)_k$  définie par

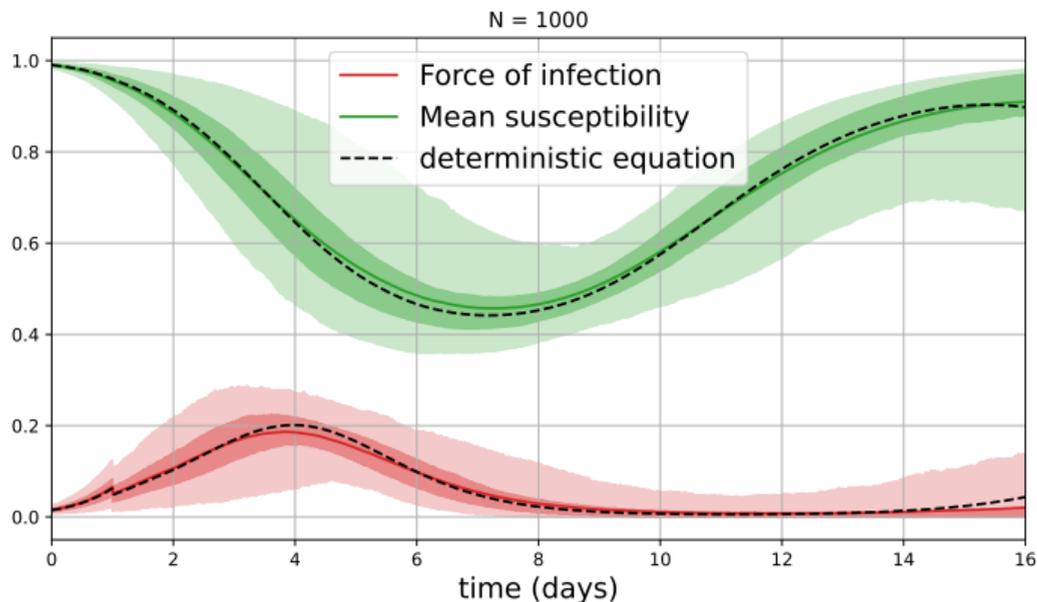
$$A_k(t) = \int_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\bar{\mathfrak{F}}(s) \gamma_{A_k(s)}(s_k(s)) \geq u} Q_k(ds, du) \quad (12)$$

où  $\bar{\mathfrak{F}}(t) = \mathbb{E} [\lambda_{1,A_1(t)}(s_1(t))]$  et  $\bar{\mathfrak{G}}(t) = \mathbb{E} [\gamma_{1,A_1(t)}(s_1(t))]$ .

- 2 Puis nous montrons que pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $T \geq 0$ , on a

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} |A_k^N(t) - A_k(t)| \right] \leq \frac{\lambda^*}{\sqrt{N}} T \exp(2\lambda^* T), \quad (13)$$

# Illustration



**Figure** – Modèle stochastique vs modèle déterministe. La zone foncée contient les trajectoires de 50% du nombre de simulations.

## Remarque

Pour

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}(t)\mathbb{1}_{t < \eta} \quad \text{et} \quad \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t - \eta)\mathbb{1}_{t > \eta}$$

avec  $\eta$  bien choisi et  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\gamma}$  déterministes, le modèle est équivalent à l'edp de Kermack et McKendrick suivante : (1932).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{S}}{dt}(t) = -\bar{S}(t) \int_0^{+\infty} \tilde{\lambda}(\tau)\bar{I}(t, \tau)d\tau \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial t}(t, \tau) + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \tau}(t, \tau) = -\mu_F(\tau)\bar{I}(t, \tau) \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial t}(t, \tau) + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tau}(t, \tau) = -\bar{R}(t, \tau)\tilde{\gamma}(\tau) \int_0^{+\infty} \tilde{\lambda}(r)\bar{I}(t, r)dr \\ \bar{I}(t, 0) = \left( \bar{S}(t) + \int_0^{+\infty} \tilde{\gamma}(\theta)\bar{R}(t, \theta)d\theta \right) \int_0^{+\infty} \tilde{\lambda}(\tau)\bar{I}(t, \tau)d\tau \\ \bar{R}(t, 0) = \int_0^{+\infty} \mu_F(\tau)\bar{I}(t, \tau)d\tau. \end{array} \right.$$

### 3. Comportement en temps long du modèle déterministe

# Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

On rappelle que  $R_0 = \int_0^{+\infty} \bar{\lambda}(s) ds$ , le nombre de reproduction de base.

## Théorème 2

Si  $R_0 < \mathbb{E} \left[ (\sup_{\tau} \gamma(\tau))^{-1} \right]$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{\mathfrak{I}}(t) \rightarrow 0$ .

# Hypothèses

## Hypothèses 2

- 1 On suppose que la fonction  $t \mapsto \gamma(t)$  est croissante p.s et on définit

$$\gamma_* = \sup_{t \geq 0} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t).$$

- 2 Il existe une v.a positive  $t_*$  telle que  $\mathbb{E}[t_*] < +\infty$  et pour  $t \geq t_*$ ,  $\gamma(t) \geq \frac{\gamma_*}{2}$  p.s.

# Caractérisation de l'équilibre endémique

## Théorème 3

Sous les hypothèses ci-dessus et si  $R_0 > \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\gamma_*} \right]$ . S'il existe  $(\bar{\mathfrak{S}}_*, \bar{\mathfrak{F}}_*)$  telle que  $(\bar{\mathfrak{S}}(t), \bar{\mathfrak{F}}(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (\bar{\mathfrak{S}}_*, \bar{\mathfrak{F}}_*)$ , Soit  $\bar{\mathfrak{F}}_* = 0$ , ou sinon

$$\bar{\mathfrak{S}}_* = \frac{1}{R_0}$$

et  $\bar{\mathfrak{F}}_*$  est l'unique solution positive de l'équation

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \gamma \left( \frac{r}{\bar{\mathfrak{F}}_*} \right) dr \right) \right] ds = R_0. \quad (14)$$

Dans le second cas,  $(\bar{I}(t), \bar{U}(t)) \rightarrow (\bar{I}_*, \bar{U}_*)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , où  $\bar{U}_* = 1 - \bar{I}_*$  et

$$\bar{I}_* = \frac{\mathbb{E}[\eta] \bar{\mathfrak{F}}_*}{R_0}.$$

# Instabilité de l'équilibre sans maladie

## Lemme 4

*Sous certaines hypothèses, si  $R_0 > \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\gamma_*} \right]$  et  $\bar{\mathfrak{F}}(0) > 0$ , alors il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $t > 0$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}(t) \geq c$ .*

# Conjecture

## Conjecture 1

Sous certaines hypothèses, si  $R_0 > \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\gamma_*} \right]$  et  $\bar{\mathfrak{F}}(0) > 0$ , alors

$$(\bar{\mathfrak{F}}(t), \bar{\mathfrak{G}}(t)) \rightarrow (\bar{\mathfrak{F}}_*, \bar{\mathfrak{G}}_*) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty,$$

où  $\bar{\mathfrak{G}}_* = 1/R_0$  et  $\bar{\mathfrak{F}}_*$  est l'unique solution positive de (14).

## 4. Théorème central limite

# Théorème central limite

On définit

$$\hat{\mathfrak{G}}^N(t) := \sqrt{N} \left( \bar{\mathfrak{G}}^N(t) - \bar{\mathfrak{G}}(t) \right) \quad \text{et} \quad \hat{\mathfrak{F}}^N(t) := \sqrt{N} \left( \bar{\mathfrak{F}}^N(t) - \bar{\mathfrak{F}}(t) \right).$$

## Théorème 5

*Sous certaines hypothèses classique sur les moments des fonctions d'infectivités et susceptibilités,*

$$\left( \hat{\mathfrak{G}}^N, \hat{\mathfrak{F}}^N \right) \Rightarrow \left( \hat{\mathfrak{G}}, \hat{\mathfrak{F}} \right) \quad \text{dans } D^2, \quad (15)$$

où  $\left( \hat{\mathfrak{G}}, \hat{\mathfrak{F}} \right)$  est l'unique solution du système d'équations ci-dessous.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}(t) = & - \int_0^t \mathbb{E} \left[ \gamma_0(t) \gamma_0(s) \exp \left( - \int_0^t \gamma_0(r) \bar{\mathcal{F}}(r) dr \right) \right] \hat{\mathcal{F}}(s) ds \\ & - \int_0^t \int_s^t \mathbb{E} \left[ \gamma(t-s) \gamma(r-s) \exp \left( - \int_s^t \gamma(u-s) \bar{\mathcal{F}}(u) du \right) \right] \hat{\mathcal{F}}(r) \bar{\mathcal{F}}(s) \bar{\mathcal{C}}(s) dr ds \\ & + \int_0^t \mathbb{E} \left[ \gamma(t-s) \exp \left( - \int_s^t \gamma(r-s) \bar{\mathcal{F}}(r) dr \right) \right] \left( \hat{\mathcal{G}}(s) \bar{\mathcal{F}}(s) + \bar{\mathcal{C}}(s) \hat{\mathcal{F}}(s) \right) ds \\ & + \hat{\mathcal{J}}_{0,1}(t) + W^\gamma(t), \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{F}}(t) = \int_0^t \bar{\lambda}(t-s) \left( \hat{\mathcal{G}}(s) \bar{\mathcal{F}}(s) + \bar{\mathcal{C}}(s) \hat{\mathcal{F}}(s) \right) ds + \hat{\mathcal{M}}_{0,1}(t) + W^\lambda(t),$$

où  $(\hat{\mathcal{J}}_{0,1}, \hat{\mathcal{M}}_{0,1}, W^\gamma, W^\lambda)$  est un vecteur gaussien de fonctions de covariance connues.

# Idée de la preuve

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{F}}^N(t) &= \sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \lambda_{k, A_k^N(t)}(s_k^N(t)) - \lambda_{k, A_k(t)}(s_k(t)) \right) \right) \\ &\quad + \sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda_{k, A_k(t)}(s_k(t)) - \mathbb{E} [\lambda_{1, A_1(t)}(s_1(t))] \right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{G}}^N(t) &= \sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \gamma_{k, A_k^N(t)}(s_k^N(t)) - \gamma_{k, A_k(t)}(s_k(t)) \right) \right) \\ &\quad + \sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma_{k, A_k(t)}(s_k(t)) - \mathbb{E} [\gamma_{1, A_1(t)}(s_1(t))] \right). \end{aligned}$$

## 5. Modèle avec Mémoire

# Susceptibilité et infectivité avec mémoire

(Travail en collaboration avec Hélène Guérin UQAM)

Dans cette partie, on suppose que pour  $\theta \in \Theta$ ,

- $\gamma(t) = \gamma(t, \theta)$  et  $\lambda(t) = \lambda(t, \theta)$ ;
- les applications  $t \mapsto \lambda(t, \theta)$  et  $t \mapsto \gamma(t, \theta)$  sont déterministes;
- A chaque infection si le trait avant infection est  $\theta$ , on tire un nouveau trait  $\tilde{\theta}$  suivant la loi de probabilité  $K(\theta, \tilde{\theta})\nu(d\tilde{\theta})$ .

On définit

$$\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{(a_k^N(t), \theta_k^N(t))}.$$

# Loi des grands nombres

$\mu^N \rightarrow \mu$  quand  $N \rightarrow \infty$ , dans  $D(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathbb{R}_+ \times \Theta))$  où si  $\mu_0$  est à densité  $u_0$  alors  $\mu_t$  est à densité  $u_t$  où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_t(a, \theta) + \partial_a u_t(a, \theta) = -\bar{\mathfrak{F}}(t) \gamma(a, \theta) u_t(a, \theta) \\ u(t, 0, \theta) = \bar{\mathfrak{F}}(t) \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \gamma(a, \tilde{\theta}) K(\tilde{\theta}, \theta) u_t(a, \tilde{\theta}) da \nu(d\tilde{\theta}) \\ u(0, a, \theta) = u_0(a, \theta) \\ \bar{\mathfrak{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \lambda(a, \theta) u_t(a, \theta) da \nu(d\theta). \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \lambda(a, \theta) u_t(a, \theta) da \nu(d\theta). \end{array} \right. \quad (17)$$

où  $a$  est l'âge d'infection,  $\theta$  le trait de l'individu.

### Hypothèses 3

Il existe  $\Theta_0 \in \mathcal{A}$  avec  $\mathbb{P}(\Theta_0) = 0$ , et une fonction positive  $\gamma_* : \Theta \rightarrow [0, 1]$ , telle que pour  $\theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ ,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^a \gamma(s, \theta) ds = \gamma_*(\theta).$$

### Hypothèses 4

- 1 Le noyau  $K$  est positif sur  $\Theta^2$  et la fonction  $\theta \mapsto \sup_{\tilde{\theta} \in \Theta} K(\tilde{\theta}, \theta)$  est  $L^1(\Theta, \nu)$ .
- 2 Il existe  $c > 0$  telle que pour  $\theta \in \Theta$ ,  $\gamma_*(\theta) > c$  p.s.
- 3  $\forall \theta \in \Theta$ ,
 
$$\sup\{t \geq 0, \lambda(t, \theta) > 0\} \leq \inf\{t \geq 0, \gamma(t, \theta) > 0\}.$$

# Existence

## Lemme 6

*Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une unique fonction propre  $\bar{\mathfrak{S}}_*$ , positive  $\nu$ -p.s., qui est  $L^1(\Theta, \nu)$ , et telle que*

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{S}}_*(\theta) = \int_{\Theta} K(\tilde{\theta}, \theta) \bar{\mathfrak{S}}_*(\tilde{\theta}) \nu(d\tilde{\theta}) \\ \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \lambda(a, \theta) \bar{\mathfrak{S}}_*(\theta) da \nu(d\theta) = 1. \end{cases} \quad (18)$$

## Théorème 7

*Sous les hypothèses ci-dessus, si*

$$\int_{\Theta} \frac{1}{\gamma_*(\theta)} \bar{\mathfrak{S}}_*(\theta) \nu(d\theta) < 1, \quad (19)$$

*il existe un équilibre endémique.*

*De plus, si on suppose que  $\nu$ -p.s,*

$$\forall a \geq 0 \quad \gamma(a, \cdot) \geq \frac{1}{a} \int_0^a \gamma(s, \cdot) ds, \quad (20)$$

*cet équilibre est unique, et si  $\int_{\Theta} \frac{1}{\gamma_*(\theta)} \bar{\mathfrak{S}}_*(\theta) \nu(d\theta) > 1$  la maladie disparaît lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .*

# Etude de la stabilité

Nous avons essayé les méthodes suivantes :

- 1 Méthode de Doeblin
- 2 Méthode Généralisée d'entropie
- 3 Doeblin-Lyapunov
- 4 Méthode des problèmes de Cauchy abstrait

Voir par exemple [Magal, Ruan et al, 2018], [Perthame, 2006], [Gabriel, 2018], [Torres, Perthame, Salort, 2022], [Webb, 1985], [Thieme, 2002].

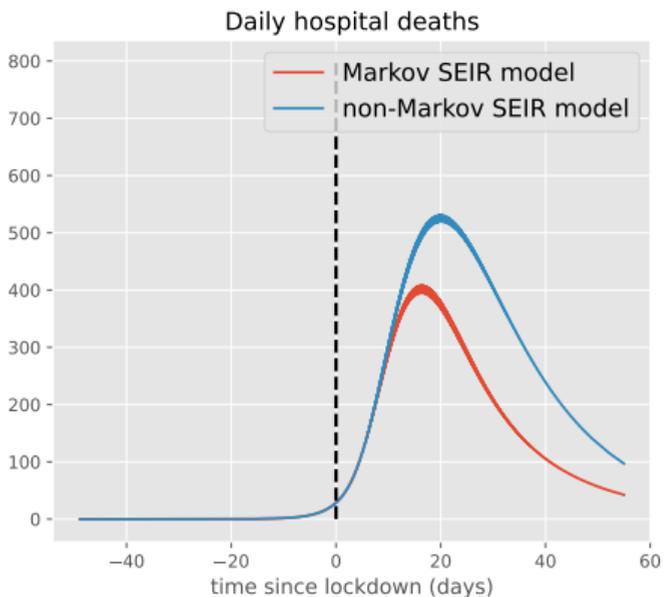
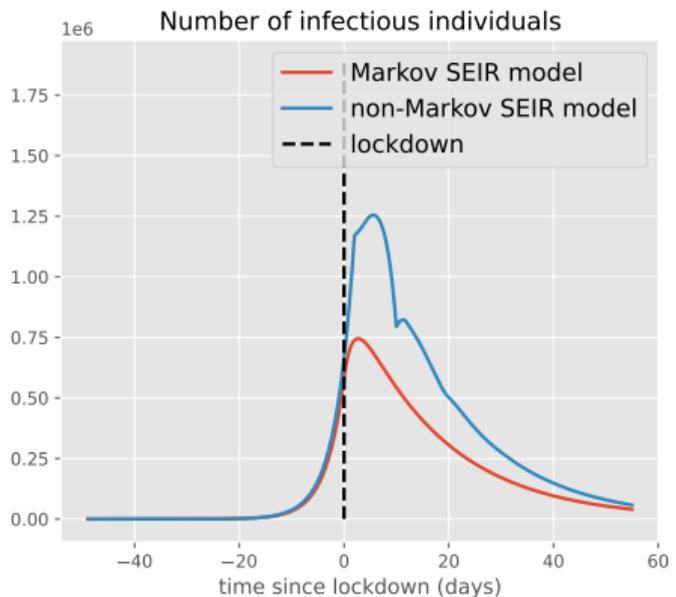
Merci pour votre aimable attention

« La recherche est une quête perpétuelle de maturité intellectuelle » Zotsa.

## 6. Aide pour les questions



# Observation



## Problème limite équations intégrales

On pose  $(x_j, y_j) := (\tau_j \bar{\mathcal{G}}, \tau_j \bar{\mathcal{F}})$  où  $\tau_j x(t) = x(t + t_j)$ .

$$\begin{cases} x_j(t) = \mathbb{E} \left[ \gamma_0(t + t_j) \exp \left( - \int_0^{t+t_j} \gamma_0(r) y_j(r) dr \right) \right] \\ \quad + \int_{-t_j}^t \mathbb{E} \left[ \gamma(t - s) \exp \left( - \int_s^t \gamma(r - s) y_j(r) dr \right) \right] x_j(s) y_j(s) ds, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} y_j(t) = \bar{l}(0) \bar{\lambda}_0(t + t_j) + \int_{-t_j}^t \bar{\lambda}(t - s) x_j(s) y_j(s) ds. \end{cases} \quad (22)$$

Par Ascoli  $(x_j, y_j) \rightarrow (x, y)$  lorsque  $j \rightarrow \infty$ , où  $(x, y)$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} y(t) = \int_{-\infty}^t \bar{\lambda}(t - s) x(s) y(s) ds, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_s^t \gamma(r - s) y(r) dr \right) \right] x(s) y(s) ds = 1. \end{cases} \quad (24)$$

## Problème avec la méthode de Doeblin

On réécrit notre EDP sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t u_t(a, \theta) &= -\partial_a u_t(a, \theta) - \bar{\mathfrak{F}}(t) \gamma(a, \theta) u_t(a, \theta) \\ &\quad + \delta_0(a) \bar{\mathfrak{F}}(t) \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \gamma(\tilde{a}, \tilde{\theta}) K(\tilde{\theta}, \theta) u_t(\tilde{a}, \tilde{\theta}) d\tilde{a} \nu(d\tilde{\theta}) \\ &=: \mathcal{A}_{\bar{\mathfrak{F}}_*}(u_t)(a, \theta) + h_t(a, \theta), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\bar{\mathfrak{F}}_*}(u_t)(a, \theta) &= -\partial_a u_t(a, \theta) - \bar{\mathfrak{F}}_* \gamma(a, \theta) u_t(a, \theta) \\ &\quad + \delta_0(a) \bar{\mathfrak{F}}_* \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \gamma(\tilde{a}, \tilde{\theta}) K(\tilde{\theta}, \theta) u_t(\tilde{a}, \tilde{\theta}) d\tilde{a} \nu(d\tilde{\theta}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_t(a, \theta) &:= (\bar{\mathfrak{F}}_* - \bar{\mathfrak{F}}(t)) \gamma(a, \theta) u_t(a, \theta) \\ &\quad + \delta_0(a) (\bar{\mathfrak{F}}(t) - \bar{\mathfrak{F}}_*) \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \gamma(\tilde{a}, \tilde{\theta}) K(\tilde{\theta}, \theta) u_t(\tilde{a}, \tilde{\theta}) d\tilde{a} \nu(d\tilde{\theta}). \end{aligned}$$

## Hypothèses 5

*Il existe  $a_* > 0$  tel que pour tout  $\theta \in \Theta$  il existe  $\sigma(\theta) \in (0, 1]$  tel que pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$\gamma(a, \theta) \geq \sigma(\theta) \mathbf{1}_{(a_*, +\infty)}.$$

# Convergence

$$\begin{aligned}
 \|u_t - u_*\|_{TV} &\leq \|P_t^*(u_0) - u_*\|_{TV} + \int_0^t \|P_{t-r}^* h_r(\cdot, \cdot)\|_{TV} dr \\
 &\leq \frac{1}{1-c} \left( e^{-\alpha t} \|u_0 - u_*\|_{TV} + \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} \|h_r(\cdot, \cdot)\|_{TV} dr \right) \\
 &\leq \frac{1}{1-c} \left( e^{-\alpha t} \|u_0 - u_*\|_{TV} + 2\lambda_* \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} \|u_r - u_*\|_{TV} dr \right) \\
 &\leq \frac{1}{1-c} e^{-(\alpha - \frac{2\lambda_*}{1-c})t} \|u_0 - u_*\|_{TV}.
 \end{aligned}$$

où  $c = a_* \bar{\mathfrak{F}}_* \exp(-2\bar{\mathfrak{F}}_* a_*) \int_{\Theta} \sigma(\theta) \nu(d\theta)$ ,  $\alpha = -\frac{\log(1-c)}{2a_*}$

# Webb (1985), Thieme

1

$$\begin{cases} \partial_t v_t = \mathcal{A}(v_t) + F(v_t) \\ v(0, a, \theta) = v_0(a, \theta) \end{cases} \quad (25)$$

où

$$v_t(a, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_t(a, \theta) \end{pmatrix} \text{ et } v_0(a, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0(a, \theta) \end{pmatrix}.$$

2

$$w_0(\mathcal{A} + F'(u_*)) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_*(t)\|_{\text{op}}, \quad (26)$$

3

$$w_{\text{ess}}(\mathcal{A} + F'(u_*)) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_*(t)\|_{\text{ess}}. \quad (27)$$

4

Étude des valeurs propres de  $\mathcal{A} + F'(u_*)$ .

## Hypothèses 6

*Il existe  $\sigma \in (0, 1]$  tel que pour tout  $\theta \in \Theta$  il existe  $a_*(\theta) > 0$  et borné tel que  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$\gamma(a, \theta) \geq \sigma \mathbb{1}_{(a_*(\theta), +\infty)}.$$

# Théorème central limite

On définit  $\hat{\mu}^N = \sqrt{N}(\mu^N - \mu)$  et on démontre que  $\hat{\mu}^N \rightarrow \hat{\mu}$  dans  $D(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}^{-(m_d+1), \alpha} \times \mathbb{R})$ , où si  $d\hat{\mu} = \hat{u}d\nu(d\theta)$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \hat{u}_t(a, \theta) + \partial_a \hat{u}_t(a, \theta) = -\hat{\mathfrak{F}}(t)\gamma(a, \theta)u_t(a, \theta) - \bar{\mathfrak{F}}(t)\gamma(a, \theta)\hat{u}_t(a, \theta) \\ \quad - \sqrt{\hat{\mathfrak{F}}(t)\gamma(a, \theta)u_t(a, \theta)\zeta_t(a, \theta)} \\ \hat{u}(t, 0, \theta) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \left[ \left( \hat{\mathfrak{F}}(t)u_t(a, \tilde{\theta}) + \bar{\mathfrak{F}}(t)\hat{u}_t(a, \tilde{\theta}) \right) \gamma(a, \tilde{\theta}) \right. \\ \quad \left. + \sqrt{\bar{\mathfrak{F}}(t)\gamma(a, \tilde{\theta})u_t(a, \tilde{\theta})\zeta_t(a, \tilde{\theta})} \right] K(\tilde{\theta}, \theta)d\nu(d\tilde{\theta}) \\ \hat{u}(0, a, \theta) = \hat{u}_0(a, \theta) \\ \hat{\mathfrak{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Theta} \lambda(a, \theta)\hat{u}_t(a, \theta)d\nu(d\theta), \end{array} \right.$$

- ❶  $m_d := \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil + 1$ , et  $\alpha > \frac{1}{2}$ .
- ❷  $\zeta_t \in \mathcal{W}_0^{-(m_d+1), \alpha}$  est le bruit blanc Gaussien en temps
- ❸  $\hat{u}_0 \in \mathcal{W}_0^{-(m_d+1), \alpha}$  est une v.a Gaussienne centrée telle que  $\varphi, \psi \in \mathcal{W}_0^{m_d+1, \alpha}$ ,

$$\mathbb{E}[\langle \hat{u}_0, \varphi \rangle \langle \hat{u}_0, \psi \rangle] = \text{Cov}(\varphi(a_0, \theta_0), \psi(a_0, \theta_0)).$$